

# 2024 年第八屆臺灣中小學數學能力檢定考試

## Taiwan Mathematics Test

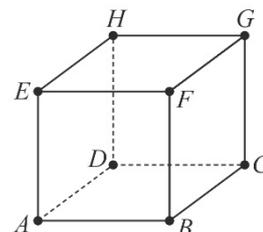
### TMT11A

#### 考試須知

1. 未經監考人員宣佈打開測驗卷之前，不可先行打開試卷作答。
2. 本次測驗時間 80 分鐘、共 30 題，分別為單選題 15 題、選填題 15 題，總分 150 分。試卷內的圖形均為示意圖，可能未依正確比例繪製。限用黑色 2B 軟心鉛筆劃記答案卡，答案卡不得以修正液(帶)修正，答案卡要保持清潔與完整，不可汙損或折疊，劃記要「黑」、「清晰」、「塗滿圓格」但不可出格。
  - (1) 單選題：
    - (I) 答對一題得 5 分，未作答得 1 分，答錯以 0 分計算。
    - (II) 每一題各有 A、B、C、D、E 五個選項，其中只有一個選項是正確的答案。
  - (2) 選填題：
    - (I) 答對一題得 5 分，未作答或答錯以 0 分計算。
    - (II) 每一題答案是範圍在 000 至 999 之間的整數。如答案為 7，請塗黑 007；如答案為 43，請塗黑 043；如答案為 123，請塗黑 123。三個圓格全對才給分，沒有倒扣或部份給分。
3. 除了考試所准許使用的尺、圓規、橡皮擦、空白計算紙與身分證明文件外，請勿攜帶任何輔助工具(包含手機、計算器、量角器、智慧型手錶及具計算功能的裝置等)進入考場，考卷上所有的題目均不需使用計算器便可作答。
4. 交卷時請將答案卡交回，測驗開始 40 分鐘後，始准交卷離場。

## 2024 臺灣中小學數學能力檢定考試 TMT11A

## 單選題



1. 如圖，在正立方體  $ABCD-EFGH$  的八個頂點中取哪四個點可形成一個正四面體？

- (A)  $A, B, C, F$                       (B)  $A, B, D, E$                       (C)  $A, C, E, F$   
 (D)  $A, C, D, F$                       (E)  $A, C, F, H$

2. 若  $a = \cos 2$ ，則下列選項何者正確？

- (A)  $-1 < a < -\frac{\sqrt{3}}{2}$                       (B)  $-\frac{\sqrt{3}}{2} < a < -\frac{1}{2}$                       (C)  $-\frac{1}{2} < a < 0$   
 (D)  $0 < a < \frac{1}{2}$                       (E)  $\frac{1}{2} < a < \frac{\sqrt{3}}{2}$

3. 若矩陣  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 、 $B = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & c \end{bmatrix}$  且  $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ ，則  $a+b-c$  之值為何？

- (A) 0    (B) 1    (C) 2    (D) 3    (E) 4

4. 若  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ，則  $a+b+c+d = ?$

- (A) -1    (B) 0    (C) 1    (D) 2    (E) 3

5. 若函數  $f(x) = 3\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 2$ ，則函數  $f$  的週期為何？

- (A) 2    (B) 4    (C)  $\pi$     (D)  $2\pi$     (E)  $4\pi$

6. 已知平面上兩直線  $L_1$ 、 $L_2$  的參數式分別為  $L_1: \begin{cases} x = -4 - t \\ y = 5 + 2t \end{cases}, t \in R$  及  $L_2: \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -4 - t \end{cases}, t \in R$ 。  
試問  $L_1$  和  $L_2$  所夾銳夾角的角平分線之斜率為何？  
(A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) -1 (E) -2

7. 已知空間中三點  $A(-1, 2, 3)$ 、 $B(2, 6, 3)$ 、 $C(-2, 4, 5)$ ，且  $D$  在  $\angle BAC$  之分角線上。若  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$ ，則  $k$  之值為何？  
(A)  $\frac{3}{5}$  (B)  $\sqrt{3}$  (C)  $\frac{5}{3}$  (D) 3 (E) 5

8. 已知向量  $\vec{a} = (2\sin\theta, 1)$ ， $\vec{b} = (1, 2\cos\theta)$ ， $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ，則  $|\vec{a} + \vec{b}|^2$  的最大值為何？  
(A)  $6 + \sqrt{3}$  (B)  $6 + 2\sqrt{3}$  (C)  $6 + 3\sqrt{2}$  (D)  $6 + 4\sqrt{2}$  (E)  $6 + 4\sqrt{3}$

9. 若方程組  $\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \\ 3x + 4y = 2a - b \\ 4x - 3y = 2b - a - 3 \end{cases}$  有解，則數對  $(a, b)$  為何？  
(A) (1, 3) (B) (1, -3) (C) (-1, 3) (D) (-1, -3) (E) (2, 3)

10. 台灣彩券發行一款九宮格對對碰刮刮樂，其中 5000 元有一格，100 元、200 元、500 元、1000 元各有二格，且九格數字任意排列（下圖為一種隱藏的可能排法）。若每張刮刮樂購買金額為 90 元，且購買的顧客祇能任意刮其中的二格，當刮出的二格金額相同時，即可得到此金額的獎金，其餘情形均無獎金，則此顧客購買一張刮刮樂損失的期望值為多少元？

200	100	1000
500	100	5000
500	200	1000

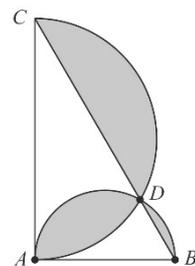
- (A) 5 元 (B) 10 元 (C) 25 元 (D) 40 元 (E) 50 元

11. 若  $\vec{a} = (\cos 20^\circ, \sin 20^\circ)$ ，則  $\vec{b}$  為下列哪一個向量時， $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$  兩向量所圍成的平行四邊形的面積最大？
- (A)  $(\cos 10^\circ, \sin 10^\circ)$       (B)  $(\cos 60^\circ, \sin 60^\circ)$       (C)  $(\cos 110^\circ, \sin 110^\circ)$   
 (D)  $(\cos 160^\circ, \sin 160^\circ)$       (E)  $(\cos 210^\circ, \sin 210^\circ)$

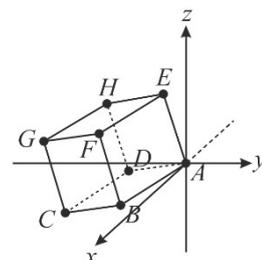
12. 若方程式  $\sin x = \cos 2x$  的正實數解依小到大排為  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots$ ，則  $\alpha_{99} - \alpha_{98}$  之值為何？
- (A)  $\frac{\pi}{6}$     (B)  $\frac{\pi}{4}$     (C)  $\frac{\pi}{3}$     (D)  $\frac{\pi}{2}$     (E)  $\frac{2\pi}{3}$

13. 若直線  $L$  過  $(\pi, 0)$ ，且和  $y = \sin x$  的圖形之交點包含  $A(a_1, b_1)$ 、 $B(a_2, b_2)$  兩點，其中  $0 < a_1 < \pi < a_2 < 2\pi$ ，則  $\frac{a_1 b_1 - a_2 b_2}{b_1 - b_2}$  的值最接近下列哪一個整數？
- (A) 1    (B) 2    (C) 3    (D) 4    (E) 5

14. 如圖，一個  $30^\circ-60^\circ-90^\circ$  的直角三角形中  $\overline{AB} = 2$ 。若分別以  $\overline{AC}$ 、 $\overline{AB}$  為直徑作半圓，交於斜邊上的  $D$  點，則陰影區域的面積為何？
- (A)  $2\pi - \frac{3}{2}\sqrt{3}$       (B)  $2\pi - 2\sqrt{3}$       (C)  $\pi - \frac{3}{4}\sqrt{3}$   
 (D)  $2\pi - \frac{3}{4}\sqrt{3}$       (E)  $\pi + \frac{3}{2}\sqrt{3}$



15. 如圖，在空間直角坐標系中，有一正六面體  $ABCD-EFGH$ ，且點  $E$  在  $xy$  平面的上方。若點  $A(0, 0, 0)$ 、 $B(2, -1, 2)$ 、 $D(1, -2, -2)$ ，則點  $E$  的坐標為何？
- (A)  $(2, 2, 1)$     (B)  $(2, -2, 1)$     (C)  $(-2, 2, 1)$     (D)  $(-2, -2, 1)$     (E)  $(-1, -2, 2)$

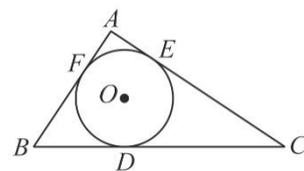


選填題
-----

- 若將  $y = 2^x$  的圖形向右移 2 單位，向下移動 3 單位後，可得到  $y = a + b \cdot 2^x$ ，則  $4b - a =$  \_\_\_\_\_。
- 已知  $\log_a x = 3$ ， $\log_b x = 4$ 。若  $\log_{ab} x$  可以表示成最簡分數  $\frac{m}{n}$ ，則  $m + n =$  \_\_\_\_\_。
- 若方程式  $\log_5(25^x + 100) = x + 1 + 2\log_5 2$  之解為  $\log_5 t$ ，則  $t =$  \_\_\_\_\_。
- 已知  $\theta$  為銳角。若  $\sin \theta = \frac{4}{5} \cos \frac{\theta}{2}$ ，則  $100 \cdot \cos \theta =$  \_\_\_\_\_。
- 有一背包客旅行於某地，而當地只有甲、乙兩間旅館可供選擇，如果今晚他住某間旅館的話，則明晚續住此間旅館的機率為  $\frac{1}{3}$ ，住另一間旅館的機率為  $\frac{2}{3}$ 。已知此人星期一晚上決定住甲旅館，若三天後的晚上他也住在甲旅館的機率之最簡分數為  $\frac{n}{m}$ ，則  $m + n =$  \_\_\_\_\_。
- 某高中的流行音樂社參加人員依性別與年級區分，人數統計如下表格所示。隨機從此社團中任選一人，令  $A, B$  分別表示抽到男生與抽到二年級學生的事件，若  $A, B$  為獨立事件，則  $x =$  \_\_\_\_\_。

	年級	一年級	二年級
性別			
男		12	36
女		8	$x$

7. 如圖，圓  $O$  為  $\triangle ABC$  之內切圓且與  $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 、 $\overline{AB}$  分別相切於  $D$ 、 $E$ 、 $F$  三點。已知  $\overline{AB}=5$ ， $\overline{BC}=7$ ， $\overline{CA}=6$ 。若  $\overrightarrow{AD}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$ ，則  $14m+7n=$  \_\_\_\_\_。



8. 某校同學參加 TMT 數學能力檢定考試，經評分後將全校同學依總分由高到低排序：前 30% 的同學屬於  $A$  組，後 20% 的同學屬於  $C$  組，其餘的同學屬於  $B$  組。進一步分析同學的答題情形，得到單選題答對率如下表。

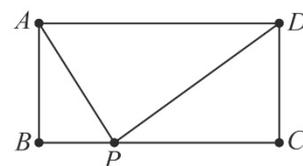
	$A$ 組	$B$ 組	$C$ 組
單選題答對率	100%	80%	40%

- 若從單選題答對的同學中任選一人，而此人屬於  $A$  組的機率之最簡分數為  $\frac{m}{n}$ ，則  $m+n=$  \_\_\_\_\_。

9. 若空間中兩直線  $L_1: \frac{x-2}{6} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{5}$  與  $L_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{m} = \frac{z-4}{n}$  互相垂直，且  $L_2$  垂直平面  $E: px+y-2z=7$ ，則  $mp-10n=$  \_\_\_\_\_。

10. 設  $A(10,-10,7)$ ， $B(2,0,3)$ ， $C(4,-4,7)$  為空間中三點。若  $H$  為  $\triangle ABC$  之垂心，則  $\overrightarrow{BH}$  在  $\overrightarrow{BC}$  上的正射影長度為 \_\_\_\_\_。

11. 如圖，矩形  $ABCD$  中， $\overline{BC}=2\overline{AB}$ ，點  $P$  在  $\overline{BC}$  上且滿足  $\overline{AB}+\overline{BP}=\overline{PD}$ ，則  $\tan \angle APD=$  \_\_\_\_\_。



12. 空間中，已知兩直線  $L_1: \begin{cases} x+y=3 \\ z=0 \end{cases}$  與  $L_2: \begin{cases} x+z=6 \\ y=0 \end{cases}$  互相歪斜，則  $L_1$  與  $L_2$  距離的平方為 \_\_\_\_\_。
13. 已知  $a$ 、 $b$  皆為實數且滿足  $2a+3b=10$ 。今數線上有  $A$ 、 $B$  兩點，其坐標分別為  $2a^2$ 、 $b^2+5$ 。若點  $P$  位於  $A$ 、 $B$  之間，且滿足  $\overline{AP}:\overline{PB}=1:2$ ，則當  $P$  點最接近原點的時候，其坐標為 \_\_\_\_\_。
14. 設空間中有  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  四點，滿足  $|\overrightarrow{AB}|=2$ 、 $|\overrightarrow{AC}|=6$ 、 $|\overrightarrow{AD}|=9$ 。若  $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AC}$  夾角為  $\theta$ ， $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ，直線  $AD$  與平面  $ABC$  夾角亦為  $\theta$ ，且四面體  $ABCD$  的體積為 2，則  $210 \cdot \sin \theta =$  \_\_\_\_\_。
15. 已知  $A$ 、 $B$  為樣本空間  $S$  的二事件，且  $P(B)=\frac{1}{3}$ 、 $P(A \cup B)=\frac{19}{30}$ 、 $P(B|A)=\frac{2}{5}$ 。若  $P(B|A')=\frac{m}{n}$ ，其中  $A'$  為  $A$  的餘事件，且  $m$ 、 $n$  為互質的正整數，則  $m+n =$  \_\_\_\_\_。

參考公式及可能用到的數值

(一) 首項為  $a$ ，公差為  $d$  的等差數列前  $n$  項之和為  $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$ 。

首項為  $a$ ，公比為  $r (r \neq 1)$  的等比數列前  $n$  項之和為  $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ 。

(二) 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ ，

三角函數的和角公式： $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ ，

三角函數的和角公式： $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ 。

(三)  $\triangle ABC$  的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ 。（ $R$  為  $\triangle ABC$  外接圓半徑）

$\triangle ABC$  的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ 。

(四) 一維數據  $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，

算數平均數  $\mu_x = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$ ，

標準差

$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1 - \mu_x)^2 + (x_2 - \mu_x)^2 + \dots + (x_n - \mu_x)^2]} = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - n\mu_x^2]}$ 。

(五) 二維數據  $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，

相關係數  $r_{X,Y} = \frac{(x_1 - \mu_x)(y_1 - \mu_y) + (x_2 - \mu_x)(y_2 - \mu_y) + \dots + (x_n - \mu_x)(y_n - \mu_y)}{n\sigma_x\sigma_y}$ ，

迴歸直線(最適合直線)方程式  $y - \mu_y = r_{X,Y} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \mu_x)$ 。

(六) 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$ 。

(七) 對數值： $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ ， $\log 5 \approx 0.6990$ ， $\log 7 \approx 0.8451$ 。

(八) 柱體體積 = 底面積  $\times$  高。

錐體體積 =  $\frac{1}{3}$ (底面積  $\times$  高)。